

## MODELO VISCOELÁSTICO GENERALIZADO PARA VIGAS LAMINADAS EMPLEANDO ELEMENTOS FINITOS JERÁRQUICOS

Ezequiel D. Sánchez<sup>a</sup>, Liz G. Nallim<sup>a</sup>, Sergio Oller<sup>b</sup> y Facundo J. Bellomo<sup>a</sup>

<sup>a</sup>ICMASa, INIQUI (CONICET). Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avda. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina, [lnallim@unsa.edu.ar](mailto:lnallim@unsa.edu.ar), <http://www.ing.unsa.edu.ar>

<sup>b</sup>CIMNE. Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería, Universidad Politécnica de Cataluña, Campus Norte UPC, Gran Capitán S/N, 08034 Barcelona, España, [sergio.oller@upc.edu](mailto:sergio.oller@upc.edu), <http://www.cimne.upc.es>

**Palabras Clave:** Vigas Laminadas, Método de los Elementos Finitos, Teorías de Orden Superior, Modelo Viscoelástico de Maxwell.

**Resumen.** En este trabajo se emplea un modelo constitutivo viscoelástico generalizado para representar el comportamiento no-lineal dependiente del tiempo de vigas laminadas. Este modelo resume las características del modelo de Kelvin y Maxwell, los cuales representan los fenómenos de elasticidad retardada o creep, y de relajación mediante ecuaciones constitutivas basadas en analogías resorte-amortiguador. Se desarrolla un elemento finito jerárquico general basado en el empleo de varias teorías de orden superior de deformación por corte (HBT), en el marco de las teorías de lámina única equivalente, mediante un tratamiento unificado. El elemento finito jerárquico se construye con funciones de soporte local, enriquecidas con polinomios ortogonales de Gram-Schmidt. Las teorías HBT incorporadas en la cinemática del elemento se caracterizan porque anulan las tensiones tangenciales en las superficies superior e inferior de las vigas laminadas, por lo que no es necesario el empleo de factores de corrección por corte. El elemento finito obtenido está libre de bloqueo por cortante y se pueden estudiar vigas delgadas con la misma formulación sin recurrir al empleo de integración reducida. Se presentan resultados del análisis estático y dinámico de vigas laminadas simétricas y no simétricas, con diferentes configuraciones mecánicas y geométricas, lo que permite mostrar la precisión y aplicabilidad de la formulación desarrollada.

## 1 INTRODUCCIÓN

La producción de estructuras duraderas, de alta resistencia y de bajo peso es creciente en diversas ramas de la ingeniería, lo cual hace enfocar la atención en estructuras multilaminadas y, en particular, en las del tipo sándwich. Éstas consisten en dos láminas delgadas y rígidas que llevan gran porción de la carga de flexión, separadas por un núcleo interior relativamente denso y ligero que tiene propiedades de disipación de energía. Estas estructuras encuentran su aplicación como elementos estructurales portantes, especialmente en las industrias aeronáutica, astronáutica y del automóvil.

Las tensiones inducidas por vibraciones y los desplazamientos son problemas importantes ya que pueden causar ruido y fatiga no deseados. Por lo tanto, el amortiguamiento y la reducción de estas vibraciones son de gran importancia. Con el fin de conseguir este objetivo, se utilizan habitualmente capas de amortiguación que consisten en láminas, de distinto espesor, de materiales visco-elásticos. Estos materiales pueden ser adaptados durante la fase de diseño o añadidos después de la finalización del proceso de diseño. Las capas amortiguadoras se introducen a la estructura como capas activas o pasivas y, dependiendo del problema considerado, pueden ser implementadas como láminas libres o restringidas (Arikoglu and Ozkol, 2010). Cuando este tipo de estructuras están sometidas a flexión cíclica, la capa de amortiguación sufre principalmente el efecto del corte. Por esta razón, es muy importante emplear una cinemática adecuada que considere el efecto del corte mediante teorías avanzadas (Nallim et al, 2017).

El estudio de la vibración y la respuesta dinámica de estructuras visco-elásticas y paneles sándwich con núcleos visco-elásticos, bajo diferentes tipos de cargas, ha sido estudiado a lo largo de los años. Salehi et al. (2005) estudiaron la relajación dinámica de placas visco-elásticas circulares no axil-simétricas. Las ecuaciones gobernantes no lineales se obtuvieron utilizando una teoría de orden superior de deformación por corte. Mahmoodi et al. (2007) investigaron las vibraciones libres no lineales de vigas visco-elásticas empleando el modelo de Kelvin-Voigt. En este trabajo, se empleó el método de múltiple escala para plantear analíticamente las formas modales no lineales y las frecuencias naturales de la viga. En la formulación obtenida se consideró la inercia y el amortiguamiento no lineales. Pradeep et al. (2007) estudió la vibración y el pandeo térmico de placas sándwich visco-elásticas utilizando el método de elementos finitos (MEF). Arikoglu et al. (2010), por su parte, analizó las vibraciones de vigas sándwich compuestas, incluyendo núcleos visco-elásticos. En esta investigación, las ecuaciones de movimiento obtenidas se resolvieron mediante el método de transformación diferencial (DTM) en el dominio de la frecuencia. Arvin et al. (2011) desarrollaron un código MEF para estudiar las frecuencias de vibración de vigas sándwich constituidas por láminas externas de material compuesto y un núcleo visco-elástico. Loja et al. (2015) estudiaron el comportamiento dinámico de vigas sándwich empleando diferentes teorías de deformación por corte para formular diferentes modelos por capa (LW), implementados a través del MEF. Li et al. (2016) desarrollaron un método semi-analítico para investigar las frecuencias naturales y formas modales de un sistema de vigas interconectadas por una capa visco-elástica. Latifi et al (2017) trata sobre el análisis transitorio geoméricamente no lineal de vigas sándwich con núcleos visco-elásticos y capas externas laminadas compuestas. La formulación se basa en la teoría de la capa completa (FLWT), el principio de superposición de Boltzmann y el uso del modelo de kernel Koltunov-Rzhanitsyn débilmente singular para modelar el núcleo visco-elástico. Galuppi et al. (2012) resolvieron analíticamente el problema dependiente del tiempo de una viga laminada simplemente apoyada, compuesta por dos láminas elásticas conectadas por una capa intermedia visco-elástica, cuya respuesta es modelada por una serie de Prony de elementos de Maxwell. La

caracterización precisa de las capacidades estructurales de los materiales compuestos laminados, en particular de los laminados sándwich es indispensable para un adecuado diseño. En particular, las vigas sándwich laminadas presentan una considerable deformación cortante transversal, lo que hace necesario el empleo de teorías avanzadas para poder realizar análisis precisos. Asik and Tezcan, 2005; Bennison and Davies, 2008; Ivanov, 2006, entre otros, demostraron que una apropiada consideración del acoplamiento por corte de la capa intermedia es importante para lograr un diseño económico.

El análisis de los trabajos de investigación publicados revela que los estudios del comportamiento de elementos estructurales que contengan láminas visco-elásticas es escaso y están restringidos a características mecánicas y condiciones de contornos específicas. Por lo expuesto, en este trabajo se emplea un modelo constitutivo visco-elástico generalizado para representar el comportamiento no-lineal dependiente del tiempo de vigas laminadas multicapas y vigas sándwich con núcleo débil. Este modelo resume las características del modelo de Kelvin y Maxwell, los cuales representan los fenómenos de elasticidad retardada o creep, y de relajación mediante ecuaciones constitutivas basadas en analogías resorte-amortiguador. Se desarrolla un elemento finito jerárquico general basado en el empleo de varias teorías de orden superior de deformación por corte (HBT), en el marco de las teorías de lámina única equivalente, mediante un tratamiento unificado. El elemento finito jerárquico se construye con funciones de soporte local, enriquecidas con polinomios ortogonales de Gram-Schmidt. Las teorías HBT incorporadas en la cinemática del elemento se caracterizan porque anulan las tensiones tangenciales en las superficies superior e inferior de las vigas laminadas, por lo que no es necesario el empleo de factores de corrección por corte. El elemento finito obtenido está libre de bloqueo por cortante y se pueden estudiar vigas delgadas con la misma formulación sin recurrir al empleo de integración reducida (Nallim et al, 2017; Rango et al., 2016). Se presentan resultados del análisis estático y dinámico de vigas laminadas simétricas y no simétricas, con diferentes configuraciones mecánicas y geométricas, lo que permite mostrar la precisión y aplicabilidad de la formulación desarrollada.

## 2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA MECÁNICO

### 2.1 Cinemática

En este estudio se considera una viga compuesta laminada, tal como la representada en la Figura 1. Se emplea un sistema de ejes cartesianos ortogonales con el eje  $x$  coincidente con el eje de la viga, el plano  $x-y$  coincidente con el plano medio y el eje  $z$  perpendicular al plano medio de la misma. La longitud, el ancho y el espesor de la viga se representan mediante  $L$ ,  $b$  y  $h$ , respectivamente, donde  $0 \leq x \leq L$ ,  $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$ ,  $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ .

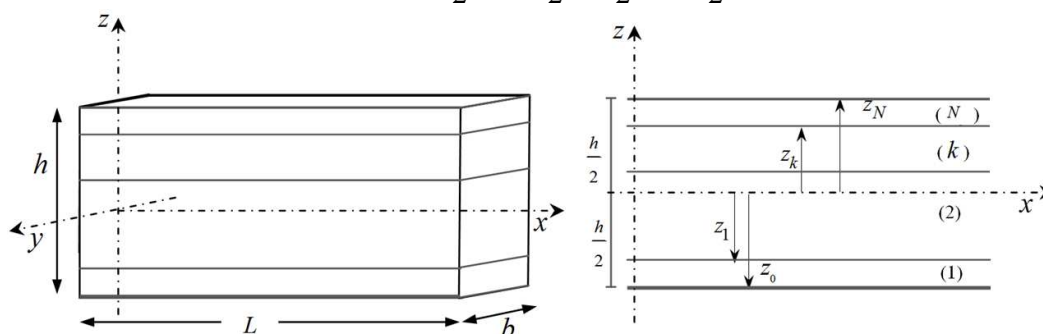


Figura 1. Geometría, ejes coordenados y notación para la viga laminada

La cinemática de la viga laminada está caracterizada por los desplazamientos de su línea media y ocurre en el plano  $x-z$ . Las componentes del campo de desplazamiento se obtienen empleando distintas teorías de deformación por corte, adoptando la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} u_1(x, z, t) &= u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f_i(z) \phi(x, t) \\ u_2(x, z, t) &= 0 \\ u_3(x, z, t) &= w(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $u_1, u_2, u_3$  son los desplazamientos de cualquier punto material en el dominio de la viga a lo largo de los ejes  $x, y, z$ , respectivamente;  $u, w$  son los desplazamientos longitudinal (eje  $x$ ) y transversal (eje  $z$ ) de puntos genéricos ubicados sobre la línea media de la viga;  $\phi$  es la rotación adicional de la normal a la sección transversal alrededor del eje  $y$ ;  $f_i(z)$ ,  $i=1, \dots, 4$  representa las funciones de corte que determinan la distribución de la deformación por corte transversal en el espesor de la viga (Fig.2). Si se considera a esta función igual a cero o a uno, la expresión cinemática (ec. (1)) colapsa a la teoría clásica de Bernoulli (TBC) o la teoría de Timoshenko (TBT), respectivamente, como casos particulares.

El planteo que aquí se propone admite la consideración de cualquier teoría HBT, pero en este trabajo se emplean cuatro que son abarcativas de los diferentes tipos existentes, es decir una trigonométrica, una hiperbólica, una exponencial y una polinómica (Fig.3), dadas por:

$$f_1(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{Touratier et al. (1992)} \quad (2)$$

$$f_2(z) = h \arctan\left(\frac{2z}{h}\right) - z \quad \text{Thai et al. (2014)} \quad (3)$$

$$f_3(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad \text{Karama (2009)} \quad (4)$$

$$f_4(z) = z - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} \quad \text{Reddy (1984)} \quad (5)$$

En los ejemplos se denomina a cada teoría como: HBT1 (ec. (2)), HBT2 (ec. (3)), HBT3 (ec. (4)) y HBT4 (ec. (5)).

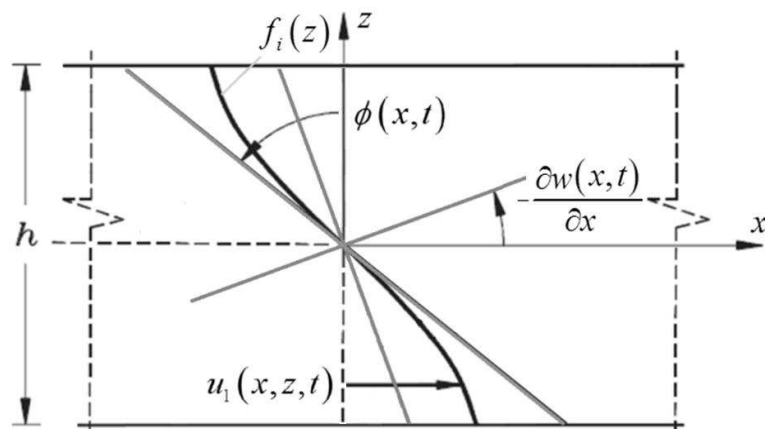


Figura 2: Esquema de la distribución de la deformación por corte transversal en el espesor de la viga

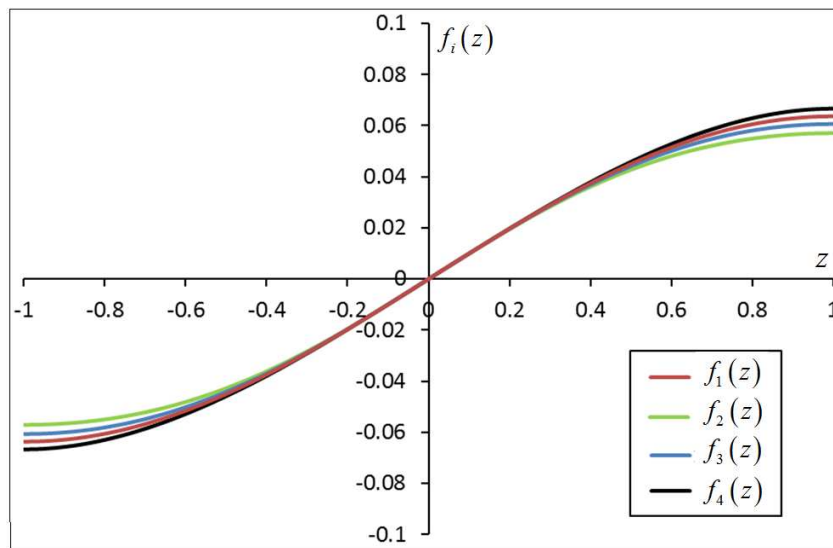


Figura 3: Representación de las funciones  $f_i(z)$  empleadas para cada HBT

### 2.2 Ecuaciones Constitutivas

El modelo constitutivo visco-elástico uniaxial de Maxwell Generalizado que se representa conceptualmente en la Figura 4 permite resumir en una sola formulación los modelos simplificados de Maxwell cuando  $C_\infty \rightarrow 0$  y Kelvin básico cuando  $C_1 \rightarrow \infty$ . El estado tensional en un instante cualquiera se expresa como:

$$\begin{aligned} \sigma^\infty(t) &= C_\infty \varepsilon(t) \\ \sigma^i(t) &= C_1 [\varepsilon(t) - \varepsilon^i(t)] = \eta_1 \dot{\varepsilon}^i(t) \end{aligned} \tag{6}$$

Donde  $\sigma^\infty$  representa, en el modelo de analogía resorte-amortiguador (Fig.4), la tensión elástica permanente en el tiempo con constante elástica  $C_\infty$ , mientras que  $\sigma^i$  representa la tensión visco-elástica decreciente en el tiempo del conjunto formado por un resorte de constante elástica  $C_1$  y un amortiguador de constante viscosa  $\eta_1$ . Además,  $\varepsilon$  representa la deformación total del sistema, mientras que  $\varepsilon^i$  y  $\dot{\varepsilon}^i$  la deformación y velocidad de deformación del amortiguador, respectivamente.

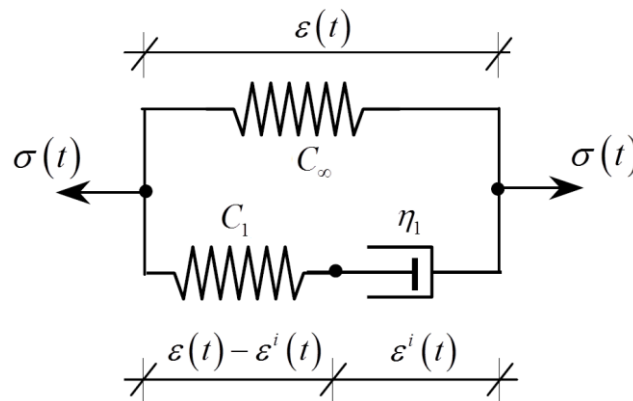


Figura 4: Esquema del modelo constitutivo uniaxial de Maxwell Generalizado

La condición de equilibrio requiere el cumplimiento de la siguiente relación:

$$\sigma(t) = \sigma^\infty(t) + \sigma^i(t) \quad (7)$$

En el caso particular de una deformación impuesta constante en el tiempo  $\varepsilon_0$ , la respuesta del modelo se esquematiza en la Figura 5 y la expresión de las tensiones se reduce a la siguiente forma simple:

$$\sigma(t) = \left( C_\infty + C_1 e^{-t/tr} \right) \varepsilon_0 \quad (8)$$

donde  $tr = \eta_1/C_1$  es el tiempo de relajación.

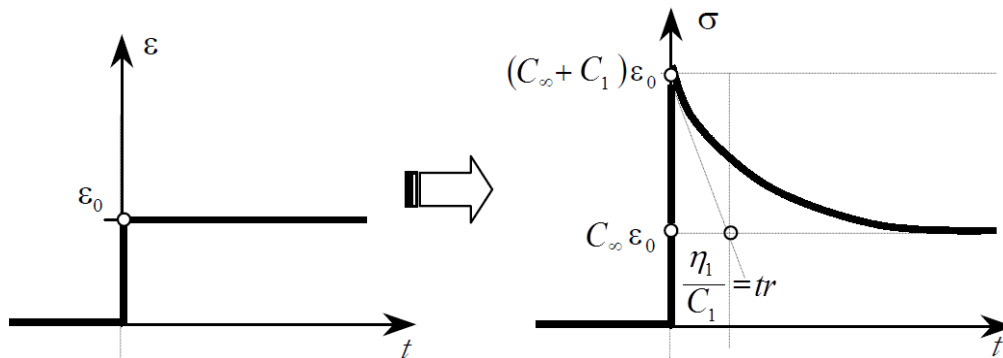


Figura 5: Respuesta del modelo constitutivo para una deformación impuesta constante

Las ecuaciones constitutivas visco-elásticas del modelo de Maxwell multiaxial generalizado (Oller, 2001) de la  $k$ -ésima lámina, en coordenadas globales, pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij}^{(k)}]^{t+\Delta t} &= [\sigma_{ij}^{(k)}]^t \cdot e^{\left(\frac{-\Delta t}{tr^{(k)}}\right)} - C_{ijkl}^{(k)} [\varepsilon_{kl}^{(k)}]^t \cdot e^{\left(\frac{-\Delta t}{tr^{(k)}}\right)} \left( 1 + \frac{C_1^{(k)}}{C_0^{(k)} \cdot tr^{(k)}} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right) \\ &+ C_{ijkl}^{(k)} [\varepsilon_{kl}^{(k)}]^{t+\Delta t} \cdot \left( 1 - \frac{C_1^{(k)}}{C_0^{(k)} \cdot tr^{(k)}} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{con } C_0^{(k)} = C_\infty^{(k)} + C_1^{(k)}$$

donde  $\sigma_{ij}^{(k)}$  y  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  denotan, respectivamente, las componentes de los tensores de tensión y deformación infinitesimales de cada capa;  $C_{ijkl}^{(k)} = C_\infty^{(k)}$  es el tensor constitutivo elástico de cada lámina y  $\Delta t$  denota cada intervalo de tiempo.

En una viga laminada, es posible considerar, para cada lámina, la siguiente relación constitutiva:

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t \cdot e^{\left(\frac{-\Delta t}{tr}\right)} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^t \cdot e^{\left(\frac{-\Delta t}{tr}\right)} \left( 1 + \frac{C_1}{C_0 \cdot tr} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right) + \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} \cdot \left( 1 - \frac{C_1}{C_0 \cdot tr} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (10)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} E^{(k)} & 0 \\ 0 & G^{(k)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

### 2.3 Primera Ley de la Termodinámica

La ecuación de equilibrio dinámico basada en la primera ley de la termodinámica para cualquier tiempo  $t + \Delta t$  está dada por la siguiente expresión:

$$P_{deformativa} = P_{introducida} - P_{cinética} \quad (12)$$

$$\int_0^L \iint_A \left[ \sigma_{xx}^{(k)} \cdot \dot{\varepsilon}_{xx}^{(k)} + \tau_{xz}^{(k)} \dot{\gamma}_{xz}^{(k)} \right] dA dx = \int_0^L q(x) \dot{u}_3 dx - \int_0^L \iint_A \rho^{(k)} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \dot{u}_1 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \dot{u}_3 \right) dA dx = 0 \quad (13)$$

donde  $q(x)$  representa la carga transversal distribuida a lo largo de la viga,  $A$  es el área de la sección transversal,  $t$  denota el tiempo,  $\dot{\varepsilon}_{xx}^{(k)}$ ,  $\dot{\gamma}_{xz}^{(k)}$ ,  $\dot{u}_1$ ,  $\dot{u}_3$  son las velocidades de deformación y las velocidades de desplazamiento y  $\rho^{(k)}$  es la densidad del material de cada lámina.

Las componentes de deformaciones y velocidad de deformación infinitesimales están dadas a partir de los desplazamientos por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla^s \mathbf{u} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \nabla^s \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (14)$$

donde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(x, z, t) \\ u_3(x, t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (15)$$

Las componentes del tensor de deformación para un punto arbitrario de la lámina  $k$ -ésima de la viga se obtienen a partir de la cinemática definida en la Sección 2.1.

$$\varepsilon_{xx}^{(k)} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_i(z) \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad \dot{\varepsilon}_{xx}^{(k)} = \left( \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + f_i(z) \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x} \quad (16)$$

$$\gamma_{xz}^{(k)} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{df_i(z)}{dz} \phi; \quad \dot{\gamma}_{xz}^{(k)} = \left( \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x} \right) = \frac{df_i(z)}{dz} \dot{\phi} \quad (17)$$

### 3 ELEMENTO FINITO JERÁRQUICO

Para la aproximación de las tres variables cinemáticas  $u$ ,  $w$  y  $\phi$  del campo de desplazamientos, se propone emplear macro-elementos finitos basados en la versión jerárquica del MEF:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \sum_{i=1}^{n_u} N_i^u(\xi) c_i^u = \mathbf{N}^{u^T} \cdot \mathbf{c}^u \\ w(\xi) &= \sum_{i=1}^{n_w} N_i^w(\xi) c_i^w = \mathbf{N}^{w^T} \cdot \mathbf{c}^w \\ \phi(\xi) &= \sum_{i=1}^{n_\phi} N_i^\phi(\xi) c_i^\phi = \mathbf{N}^{\phi^T} \cdot \mathbf{c}^\phi \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $-1 \leq \xi \leq 1$  es la coordenada natural a lo largo de la longitud  $L$  de la viga dada por  $\xi = 2 \frac{x}{L} - 1$ ;  $c_i^*$  ( $*$  =  $u, w, \phi$ ) son los desplazamientos generalizados;  $n_*$  son las cantidades de

términos en las funciones de aproximación para las tres variables nodales y  $N_i^*$  son las funciones de forma que se describen en el párrafo siguiente, de esta manera el vector de desplazamientos generalizados y el vector de las funciones de forma utilizados están dados por:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{c}^u, \mathbf{c}^w, \mathbf{c}^\phi]^T = [c_1^u, c_2^u, \dots, c_{n_u}^u, c_1^w, c_2^w, \dots, c_{n_w}^w, c_1^\phi, c_2^\phi, \dots, c_{n_\phi}^\phi]^T$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}^u, \mathbf{N}^w, \mathbf{N}^\phi]^T = [N(\xi)_1^u, \dots, N(\xi)_{n_u}^u, N(\xi)_1^w, \dots, N(\xi)_{n_w}^w, N(\xi)_1^\phi, \dots, N(\xi)_{n_\phi}^\phi]^T \quad (19)$$

Las primeras funciones de forma son funciones de soporte local. Para las aproximaciones de  $u$  y de  $\phi$  se emplean idénticas funciones, a las que se designan:  $N_1^u(\xi)$  y  $N_2^u(\xi)$ , que son los polinomios lineales clásicos de Lagrange. Para la aproximación de  $w$ ,  $N_i^w(\xi)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), se emplean polinomios de Hermite. Luego, se adicionan polinomios ortogonales de Gram-Schmidt (GS) para formular un macro-elemento finito de viga enriquecido:  $N_i^u(\xi)$  ( $i = 3 \dots n_u, n_\phi$ ) y  $N_i^w(\xi)$  ( $i = 5 \dots n_w$ ). El grado del primer polinomio de GS es 2 para el desplazamiento longitudinal ( $u$ ) y para la rotación ( $\phi$ ), y 4 para el desplazamiento transversal ( $w$ ). Estos polinomios se determinan de tal manera que tengan una contribución nula a los desplazamientos generalizados correspondientes a los nodos de borde. Los demás elementos de los conjuntos de polinomios ortogonales característicos se generan siguiendo el procedimiento de GS (Nallim, et al., 2005; Nallim and Oller, 2008; Rango et al., 2013). De esta manera, los modos jerárquicos contribuyen sólo a los desplazamientos generalizados internos del elemento y, por lo tanto, no afectan los desplazamientos en los nodos de borde (Bardell et al., 1996). Los polinomios de soporte local y los de enriquecimiento se muestran en la Tabla 1.

Para la aproximación de las tres variables cinemáticas nodales del campo de velocidades y aceleraciones, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{u}(\xi) &= \mathbf{N}^{uT} \cdot \dot{\mathbf{c}}^u; & \ddot{u}(\xi) &= \mathbf{N}^{uT} \cdot \ddot{\mathbf{c}}^u \\ \dot{w}(\xi) &= \mathbf{N}^{wT} \cdot \dot{\mathbf{c}}^w; & \ddot{w}(\xi) &= \mathbf{N}^{wT} \cdot \ddot{\mathbf{c}}^w \\ \dot{\phi}(\xi) &= \mathbf{N}^{\phi T} \cdot \dot{\mathbf{c}}^\phi; & \ddot{\phi}(\xi) &= \mathbf{N}^{\phi T} \cdot \ddot{\mathbf{c}}^\phi \end{aligned} \quad (20)$$

Polinomios de Lagrange $u, \phi$	$N_1^u = 0.5(-\xi + 1)$
	$N_2^u = 0.5(-\xi + 1)$
Primer polinomio de Gram-Schmidt para $u, \phi$	$N_3^u = -1 + \xi^2$
Polinomios de Hermite para $w$	$N_1^w = 0.25(2 - 3\xi + \xi^3)$
	$N_2^w = 0.25(2 + 3\xi - \xi^3)$
	$N_3^w = 0.25(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$
	$N_4^w = 0.25(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$
Primer polinomio de Gram-Schmidt para $w$	$N_5^w = 1 - 2\xi^2 + \xi^4$

Tabla 1. Polinomios de soporte local y primeros polinomios de Gram-Schmidt para las tres variables nodales



Debido a que en la ec. (18) las funciones de forma  $N_i^u(\xi)$  para  $i=1,2$  y  $N_i^w(\xi)$  para  $i=1,\dots,4$  son funciones de soporte local, y que las funciones de enriquecimiento tienen una contribución nula a los desplazamientos en los nodos de borde, resulta:

$$\begin{aligned} u_1 &= u|_{\xi=-1} = c_1^u, & u_2 &= u|_{\xi=+1} = c_2^u, \\ \phi_1 &= \phi|_{\xi=-1} = c_1^\phi, & \phi_2 &= \phi|_{\xi=+1} = c_2^\phi, \\ w_1 &= w|_{\xi=-1} = c_1^w, & w_2 &= w|_{\xi=+1} = c_2^w, \\ \frac{\partial w}{\partial \xi}|_{\xi=-1} &= c_3^w, & \frac{\partial w}{\partial \xi}|_{\xi=+1} &= c_4^w \end{aligned} \quad (21)$$

donde se designa como nodo 1 al que corresponde a la coordenada natural  $\xi = -1$  y como nodo 2 al que corresponde a la coordenada natural  $\xi = +1$ .

Es decir que los dos primeros desplazamientos generalizados para  $u$  y  $\phi$  tienen un significado físico concreto (desplazamientos longitudinales y giros de los nodos extremos), mientras que para  $w$  los cuatro primeros representan los desplazamientos transversales y sus correspondientes derivadas en los extremos de la viga. Los restantes son variables generalizadas utilizadas por los polinomios de GS para la aproximación interna del elemento.

#### 4 ECUACION DE EQUILIBRIO DINÁMICO

Reemplazando el modelo constitutivo de Maxwell Generalizado dado por la ec. (10) en la ecuación (13) de la primera ley de la termodinámica se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_A \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t e^{(-\Delta t/tr)} dA dx + \int_0^L \int_A \mathbf{H} \cdot (\mathbf{C}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^t) e^{(-\Delta t/tr)} dA dx + \int_0^L \int_A \mathbf{H} \cdot (\mathbf{C}^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t}) e^{(-\Delta t/tr)} dA dx = \\ \left[ \int_0^L q(x) \dot{u}_3 dx - \int_0^L \int_A \rho^{(k)} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \dot{u}_1 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \dot{u}_3 \right) dA dx \right]^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (22)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \left[ \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x}, \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x} \right]; \quad \mathbf{C}^{(1)} = \begin{bmatrix} E_\infty^{(k)} \left( 1 + \frac{E_1}{E_0 \cdot tr} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right)^{(k)} & 0 \\ 0 & G_\infty^{(k)} \left( 1 + \frac{G_1}{G_0 \cdot tr} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right)^{(k)} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C}^{(2)} &= \begin{bmatrix} E_\infty^{(k)} \left( 1 - \frac{E_1}{E_0 \cdot tr} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right)^{(k)} & 0 \\ 0 & G_\infty^{(k)} \left( 1 - \frac{G_1}{G_0 \cdot tr} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right)^{(k)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

Reemplazando la aproximación de las variables cinemáticas de las ec. (18) y (20) en la formulación anterior, ec. (22), simplificando las velocidades generalizadas  $\dot{\mathbf{c}}$  y trabajando en coordenadas naturales, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_{-1}^1 \left( \iint_A \mathbf{Q}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}' e^{\left(\frac{\Delta t}{tr}\right)} dA \right) \frac{L}{2} d\xi + \int_{-1}^1 \left( \iint_A \mathbf{Q}^{(1)} \cdot (\mathbf{C}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}') e^{\left(\frac{\Delta t}{tr}\right)} dA \right) \frac{L}{2} d\xi}_{\mathbf{F}'_{int}} \\
 & + \underbrace{\left[ \int_{-1}^1 \left( \mathbf{D}^{(1)} : \mathbf{A} : \mathbf{D}^{(1)T} + \mathbf{N}^u B_1 \mathbf{N}^{uT} \right) \frac{L}{2} d\xi \right]}_{\mathbf{K}} \mathbf{c}^{t+\Delta t} = \underbrace{\int_{-1}^1 \mathbf{N}^w q \frac{L}{2} d\xi}_{\mathbf{F}^{t+\Delta t}_{ext}} \quad (24) \\
 & - \underbrace{\left[ \int_{-1}^1 \left( \mathbf{B}^{(1)} - (\mathbf{B}^{(4)} + \mathbf{B}^{(4)T}) + \mathbf{B}^{(2)} - (\mathbf{B}^{(5)} + \mathbf{B}^{(5)T}) + [\mathbf{B}^{(6)} + \mathbf{B}^{(6)T}] + \mathbf{B}^{(3)} \right) \frac{L}{2} d\xi \right]}_{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{c}}^{t+\Delta t}
 \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \mathbf{N}^u_{,\xi} & 0 \\ -z \frac{4}{L^2} \mathbf{N}^w_{,\xi\xi} & 0 \\ \frac{2}{L} \mathbf{N}^u_{,\xi} & \frac{df_i(z)}{dz} \mathbf{N}^u \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \mathbf{N}^u_{,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{L^2} \mathbf{N}^w_{,\xi\xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{L} \mathbf{N}^u_{,\xi} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$(A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{13}, A_{23}, A_{33}) = \iint_A E_\infty^{(k)} \left( 1 - \frac{E_1}{E_0 \cdot tr} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right)^{(k)} (1, z, z^2, f(z), zf(z), [f(z)]^2) dA \quad (26)$$

$$B_1 = \iint_A G_\infty^{(k)} \left( 1 - \frac{G_1}{G_0 \cdot tr} \cdot \frac{\Delta t}{2} \right)^{(k)} [f(z)_{,z}]^2 dA$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^u I_0 \mathbf{N}^{uT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{4}{L^2} \mathbf{N}^w_{,\xi} I_2 \mathbf{N}^{wT}_{,\xi} + \mathbf{N}^w I_0 \mathbf{N}^{wT} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^u I_5 \mathbf{N}^{uT} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}^{(4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{2}{L} \mathbf{N}^w_{,\xi} I_1 \mathbf{N}^{uT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^{(5)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{2}{L} \mathbf{N}^u I_3 \mathbf{N}^{wT}_{,\xi} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^{(6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^u I_4 \mathbf{N}^{uT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = \iint_A \rho^{(k)} (1, z, z^2, zf(z), f(z), [f(z)]^2) dA \quad (28)$$

Obtenemos la ecuación de equilibrio dinámico NO LINEAL, donde las fuerzas internas contienen los términos viscoelástico de la no linealidad del material:

$$\boxed{\mathbf{M} \dot{\mathbf{c}}^{t+\Delta t} + \left( \mathbf{F}'_{int} + \mathbf{K} \mathbf{c}^{t+\Delta t} \right) - \mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t} = 0} \quad (29)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa,  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez y  $\mathbf{F}_{ext}$  el vector de fuerzas externas en el paso de tiempo actual, cuyas componentes se detallan a continuación:

$$\mathbf{F}_{ext} = [\mathbf{F}_{ext}^u, \mathbf{F}_{ext}^w, \mathbf{F}_{ext}^{\phi}]^T = \frac{L}{2} [0_1^u, 0_2^u, \dots, 0_{n_u}^u, qN_1^w, qN_2^w, \dots, qN_{n_w}^w, 0_1^{\phi}, 0_2^{\phi}, \dots, 0_{n_{\phi}}^{\phi}]^T;$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{uu} & \mathbf{m}^{uw} & \mathbf{m}^{u\phi} \\ & \mathbf{m}^{ww} & \mathbf{m}^{w\phi} \\ sym & & \mathbf{m}^{\phi\phi} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{uu} & \mathbf{k}^{uw} & \mathbf{k}^{u\phi} \\ & \mathbf{k}^{ww} & \mathbf{k}^{w\phi} \\ sym & & \mathbf{k}^{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (30)$$

donde

$$m_{ij}^{uu} = I_0 \frac{L}{2} \int_{-1}^1 N_i^u N_j^{uT} d\xi; \quad k_{ij}^{uu} = A_{11} \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \frac{dN_i^u}{d\xi} \frac{dN_j^u}{d\xi} d\xi;$$

$$m_{ij}^{uw} = -I_1 \int_{-1}^1 N_i^u \frac{dN_j^{wT}}{d\xi} d\xi; \quad k_{ij}^{uw} = -A_{12} \frac{4}{L^2} \int_{-1}^1 \frac{dN_i^u}{d\xi} \frac{d^2 N_j^w}{d\xi^2} d\xi;$$

$$m_{ij}^{u\phi} = I_4 \frac{L}{2} \int_{-1}^1 N_i^u N_j^{uT} d\xi; \quad k_{ij}^{u\phi} = A_{13} \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \frac{dN_i^u}{d\xi} \frac{dN_j^u}{d\xi} d\xi;$$

$$m_{ij}^{ww} = I_2 \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \frac{dN_i^w}{d\xi} \frac{dN_j^{wT}}{d\xi} d\xi + I_0 \frac{L}{2} \int_{-1}^1 N_i^w N_j^{wT} d\xi; \quad k_{ij}^{ww} = A_{22} \frac{8}{L^3} \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_i^w}{d\xi^2} \frac{d^2 N_j^w}{d\xi^2} d\xi;$$

$$m_{ij}^{w\phi} = -I_3 \int_{-1}^1 \frac{dN_i^w}{d\xi} N_j^{uT} d\xi; \quad k_{ij}^{w\phi} = -A_{23} \frac{4}{L^2} \int_{-1}^1 \frac{d^2 N_i^w}{d\xi^2} \frac{dN_j^u}{d\xi} d\xi;$$

$$m_{ij}^{\phi\phi} = I_5 \frac{L}{2} \int_{-1}^1 N_i^u N_j^{uT} d\xi; \quad k_{ij}^{\phi\phi} = A_{33} \frac{2}{L} \int_{-1}^1 \frac{dN_i^u}{d\xi} \frac{dN_j^u}{d\xi} d\xi + B_1 \frac{L}{2} \int_{-1}^1 N_i^u N_j^u d\xi;$$

## 5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DINÁMICO NO LINEAL

La resolución de este problema clásico en dinámica estructural se basa en admitir el “concepto de separación de variables” en el cual se supone que los problemas temporales y espaciales son independientes entre sí. Dicho de otra manera, se resuelve en cada instante de tiempo  $t$  la ecuación semi-discreta que representa el equilibrio espacial en dicho instante (Fig.6).

### 5.1 Método de Newmark

Es un método de integración temporal de un paso, que se caracteriza porque los desplazamientos y velocidades en el tiempo  $(t + \Delta t)$  se obtienen parcialmente a partir de un sistema ya conocido en el tiempo  $(t)$  anterior.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}^{t+\Delta t} &= \Delta \mathbf{c}^{t+\Delta t} + \mathbf{c}^t \\
 \dot{\mathbf{c}}^{t+\Delta t} &= \left( \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \right) \Delta \mathbf{c}^{t+\Delta t} + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{c}}^t + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{c}}^t \\
 \ddot{\mathbf{c}}^{t+\Delta t} &= \left( \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \right) \Delta \mathbf{c}^{t+\Delta t} - \left( \frac{1}{\Delta t \beta} \right) \dot{\mathbf{c}}^t - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{c}}^t
 \end{aligned} \tag{32}$$

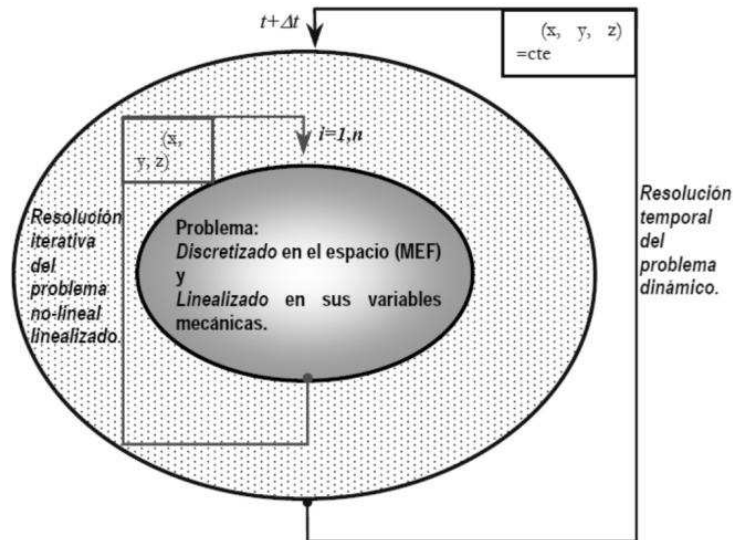


Figura 6: Esquema de la resolución no lineal del problema dinámico

## 5.2 Método de Newton-Raphson

Resuelve el problema espacial al eliminar el residuo  $\Delta \mathbf{f}$  mediante la linealización sucesiva, donde el tiempo  $(t + \Delta t)$  permanece constante hasta lograr la convergencia del sistema:

$$\mathbf{M}^i [\ddot{\mathbf{c}}]^{t+\Delta t} + {}^i [\mathbf{F}_{int}]^t + \mathbf{K}^i [\mathbf{c}]^{t+\Delta t} - {}^i [\mathbf{F}_{ext}]^{t+\Delta t} = {}^i [\Delta \mathbf{f}]^{t+\Delta t} \tag{33}$$

Se fuerza el equilibrio actual en el estado  $(i+1)$  y se lo expresa a través de una expansión en serie de Taylor truncada en su primera variación,

$$\begin{aligned}
 {}^i [\Delta \mathbf{f}]^{t+\Delta t} + \left[ \frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \mathbf{c}} \right]^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1} [\Delta \mathbf{c}]^{t+\Delta t} \cong {}^{i+1} [\Delta \mathbf{f}]^{t+\Delta t} = \mathbf{0} \\
 {}^i \left( \mathbf{M} \ddot{\mathbf{c}}^{t+\Delta t} + \mathbf{F}_{int}^t + \mathbf{K} \mathbf{c}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t} \right) + \underbrace{\left( \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{c}}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{c}} + \frac{\partial \mathbf{F}_{int}^t}{\partial \mathbf{c}} + \mathbf{K} - \frac{\partial \mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{c}} \right)}_{{}^i [\mathbf{J}]^{t+\Delta t}} \cdot {}^{i+1} [\Delta \mathbf{c}]^{t+\Delta t} = 0
 \end{aligned} \tag{34}$$

donde  $\mathbf{J}$  es el operador Jacobiano tangente.

Despejando, se obtiene el incremento de desplazamiento necesario para la resolución del sistema en el tiempo

$${}^{i+1} [\Delta \mathbf{c}]^{t+\Delta t} = - \left( {}^i [\mathbf{J}]^{t+\Delta t} \right)^{-1} \cdot {}^i [\Delta \mathbf{f}]^{t+\Delta t} \tag{35}$$

### 5.3 Algoritmo

1. Inicialización de desplazamientos, velocidades, aceleraciones y fuerzas internas

$$\mathbf{c}_0 = \{0\}; \quad \dot{\mathbf{c}}_0 = \{0\}; \quad \ddot{\mathbf{c}}_0 = \{0\}; \quad \mathbf{F}_{int0} = \{0\}$$

2. Cálculo del operador Jacobiano tangente constante

$$\mathbf{J} = \mathbf{M} \frac{1}{\beta \Delta t^2} + \mathbf{K}^T$$

3. Control de la cantidad de iteraciones temporales desde  $n = 1$  hasta tiempo máximo

- a) Si  $n\Delta t > t_{\max} \Rightarrow FIN$

- b) Si  $n\Delta t \leq t_{\max} \Rightarrow$  continúa... Iteración temporal

4. Obtención del residuo inicial y corrección inicial de los desplazamientos

$$\Delta \mathbf{f}_0 = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{c}}_0 + \mathbf{F}_{int}^t + \mathbf{K} \mathbf{c}_0 - \mathbf{F}_{ext} \rightarrow \Delta \mathbf{c}_0 = -[\mathbf{J}]^{-1} \cdot \Delta \mathbf{f}_0$$

5. Determinación de los campos de desplazamiento, velocidad y aceleración por NEWMARK

$$\mathbf{c}_N = \Delta \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_0$$

$$\dot{\mathbf{c}}_N = \left( \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \right) \Delta \mathbf{c}_0 + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{c}}_0 + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{c}}_0$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_N = \left( \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \right) \Delta \mathbf{c}_0 - \left( \frac{1}{\Delta t \beta} \right) \dot{\mathbf{c}}_0 - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{c}}_0$$

6. Cálculo del residuo y verificación por NEWTON RAPHSON

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{c}}_N + \mathbf{F}_{int}^t + \mathbf{K} \mathbf{c}_N - \mathbf{F}_{ext}$$

- a) si  $|\Delta \mathbf{f}| \leq TOL \Rightarrow$  asignación  $\mathbf{c}_0 \leftarrow \mathbf{c}_N$ ; actualización  $\mathbf{F}_{int}$ ;  $n = n + 1$ ; regresa a 3)

- b) si  $|\Delta \mathbf{f}| > TOL \Rightarrow$  continúa... Linealización

7. Cálculo de la nueva corrección de los desplazamientos

$$\Delta \mathbf{c} = -[\mathbf{J}]^{-1} \cdot \Delta \mathbf{f}$$

8. Determinación de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones actualizadas

$$\mathbf{c}_A = \Delta \mathbf{c} + \mathbf{c}_N$$

$$\dot{\mathbf{c}}_A = \left( \beta \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \Delta \mathbf{c} + \dot{\mathbf{c}}_N$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_A = \left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} \right) \Delta \mathbf{c} + \ddot{\mathbf{c}}_N$$

9. Determinación del residuo actualizado  $\Delta \mathbf{f}$ , asignación  $\mathbf{c}_N \leftarrow \mathbf{c}_A$  y regresa a 6)

## 6 EJEMPLOS NUMÉRICOS

La formulación obtenida fue implementada en un programa desarrollado a tal fin y a continuación se muestran los resultados de los estudios numéricos realizados. En todos los casos se implementaran 8 términos para los polinomios de GS y un intervalo de tiempo  $\Delta t = 0.2 \text{ seg}$ .

Como primer caso cuasi-estático se analiza la variación del desplazamiento vertical en función del tiempo (Fig.7) para una viga laminada empotrada en ambos extremos (E-E) y sometida a una carga uniformemente distribuida  $q = 1.0 \text{ KN/m}$ . La viga tiene longitud

$L = 2.0m$ , sección transversal  $h/b = 0.2/0.1m$  y está compuesta por tres láminas de igual espesor, donde el núcleo es de polímero visco-elástico 3M ISD 112 (27°C) y las capas externas, elásticas lineales, son de plástico reforzado con fibras de carbono (Arikoglu and Ozkol, 2010) con las siguientes propiedades mecánicas (Laminado tipo I):

$$E_{\infty}^{(2)} = 6.595MPa, E_1^{(2)} = 15.0MPa, tr^{(2)} = 1.405seg, \nu^{(2)} = 0.25$$

$$E^{(1)} = E^{(3)} = 24.0MPa, \nu^{(1)} = \nu^{(3)} = 0.25$$

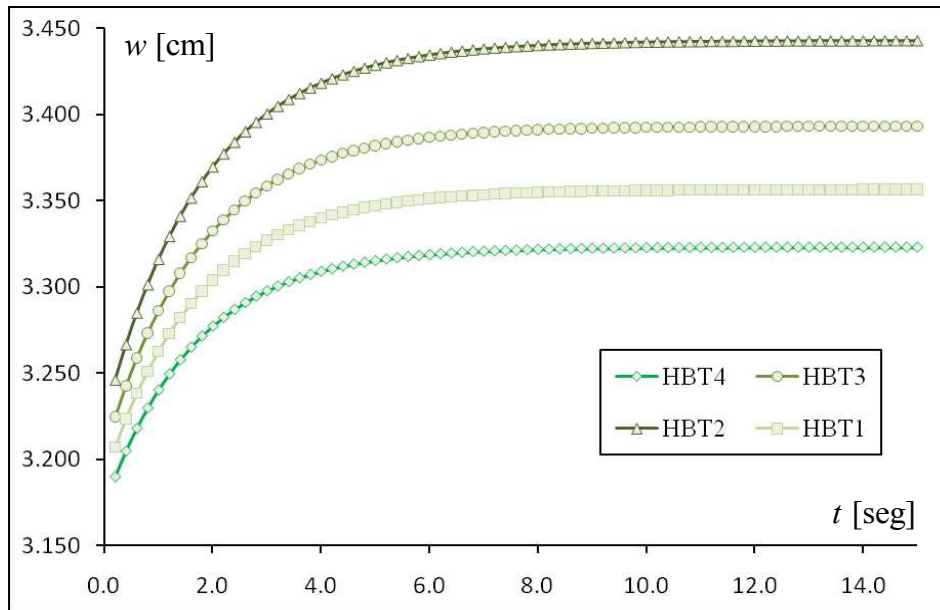


Figura 7. Diagrama de deflexión  $w(L/2)$  en función del tiempo  $t$  para la primera viga laminada

Para el mismo ejemplo se considera una variación en las propiedades de las láminas elásticas de la viga, empleando un segundo material de plástico reforzado con fibras de carbono, con propiedades  $E^{(1)} = E^{(3)} = 38.6MPa$  (Laminado tipo II), para analizar su influencia en la respuesta de la viga. En la Tabla 2 se muestran los resultados obtenidos empleando cada una de las teorías de orden superior, es decir empleando cuatro funciones diferentes para la definición del alabeo por corte transversal, para determinados tiempos del gráfico de la Figura 7, donde se puede observar como aumenta la deformación vertical por el efecto visco-elástico.

Laminado	Tiempo [seg]	Teorías			
		HBT 1	HBT 2	HBT 3	HBT 4
Tipo I	1.0	3.26276	3.31614	3.28621	3.24032
	2.0	3.30399	3.36956	3.33248	3.27725
	6.0	3.43448	3.43448	3.38682	3.31862
	10.0	3.35594	3.44185	3.39255	3.32254
	15.0	3.35644	3.44275	3.39320	3.32293
Tipo II	1.0	2.06574	2.11164	2.09161	2.04357
	2.0	2.08436	2.13690	2.10698	2.05711
	6.0	2.10425	2.16520	2.10750	2.07410
	10.0	2.10594	2.16787	2.10787	2.08059
	15.0	2.10609	2.16813	2.11818	2.09096

Tabla 2. Variación de las deflexiones  $w(L/2)$  para distintos tiempos  $t$  en ambas vigas laminadas

El segundo caso, cuasi-estático, consiste en el estudio de las tensiones normales y tangenciales en función del tiempo (Fig.8) para una viga laminada simplemente apoyada (S-S) y sometida a una carga uniformemente distribuida  $q = 1.0MN / m$ . La viga tiene la misma sección transversal, número de capas y propiedades que el laminado tipo I del ejemplo anterior, pero se analizan distintas relación de esbeltez  $L/h$ . Los resultados de las tensiones para la capa visco-elástica empleando solo la teoría de la ec. (4) (Reddy, 1984) se muestran en la Tabla 3, para determinados tiempos del gráfico de la Figura 8, donde se puede observar como disminuyen las tensiones por el efecto visco-elástico.

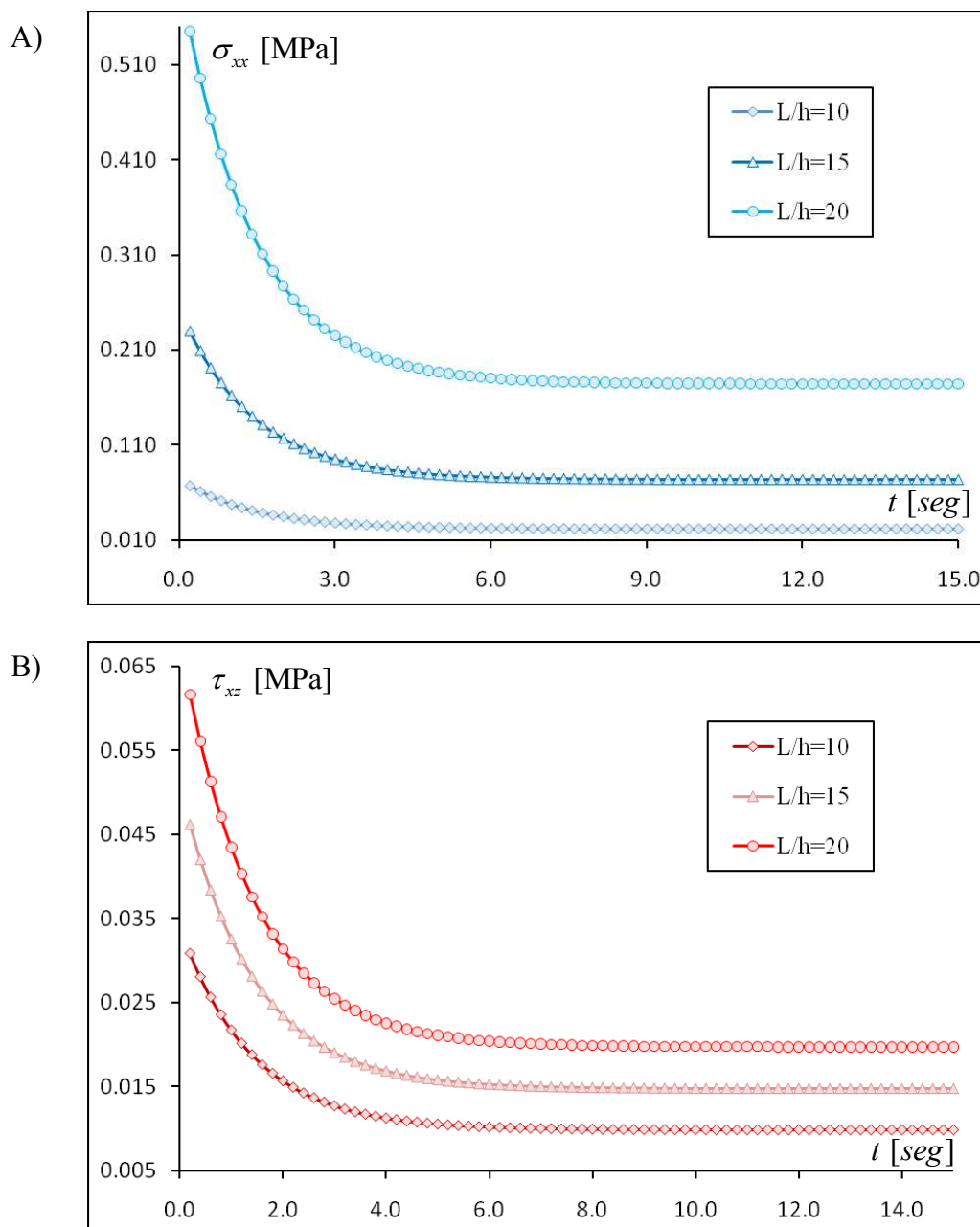


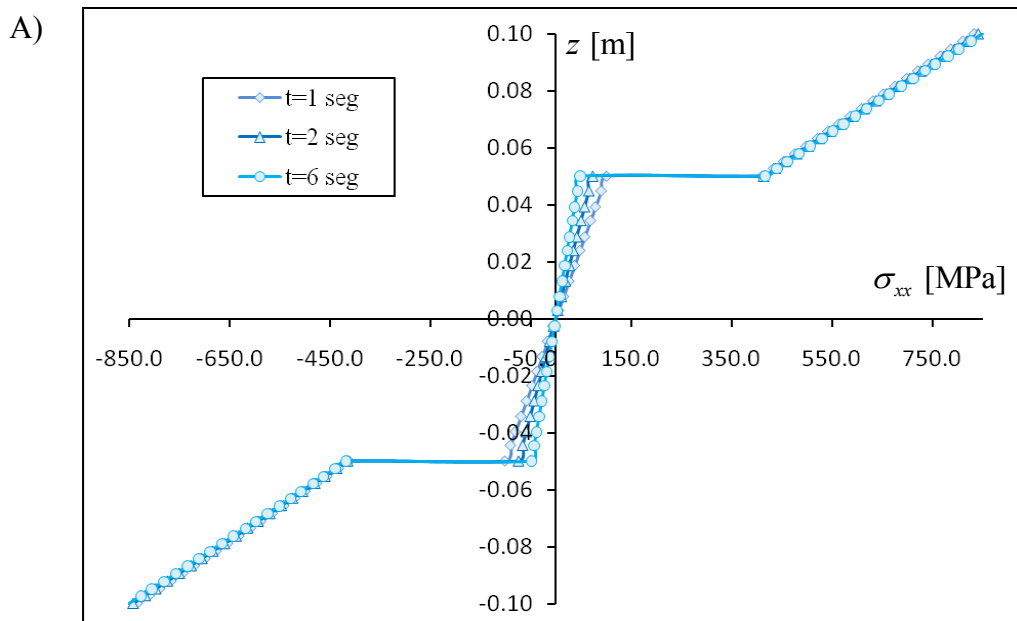
Figura 8. Diagramas A)  $\sigma_{xx}(L/2; 2h/3)$ , B)  $\tau_{xz}(L/8; 0)$  en función del tiempo  $t$

Esbeltez	Tiempo [seg]	Tensiones	
		$\sigma_{xx}$	$\tau_{xz}$
$L/h = 10$	1.0	0.04734	0.02173
	2.0	0.03418	0.01569
	6.0	0.02223	0.01020
	10.0	0.02154	0.00988
$L/h = 15$	1.0	0.16192	0.03260
	2.0	0.11691	0.02353
	6.0	0.07604	0.01531
	10.0	0.07367	0.01483
$L/h = 20$	1.0	0.38405	0.04347
	2.0	0.27729	0.03130
	6.0	0.18036	0.02042
	10.0	0.17474	0.01978

Tabla 3. Variación de las tensiones normales  $\sigma_{xx}(L/2; 2h/3)$  y tangenciales  $\tau_{xz}(L/8; 0)$  para el Laminado tipo I

Para el tercer caso, cuasi-estático, se presentan las distribuciones de tensiones normales y tangenciales en la altura de la sección transversal de la viga, obtenidos a partir de las deformaciones calculadas y las relaciones constitutivas adoptadas, para ciertos tiempos (Fig.9). Para ello consideramos una viga laminada empotrada en ambos extremos (E-E) y sometida a una carga uniformemente distribuida  $q = 1.0 MN/m$ . La viga tiene una esbeltez  $L/h = 10$  y está formada por tres láminas de igual espesor, con el mismo núcleo de polímero visco-elástico pero capas externas de material elástico lineal, con las siguientes propiedades:

$$E^{(1)} = E^{(3)} = 18.0 MPa, \quad \nu^{(1)} = \nu^{(3)} = 0.25$$





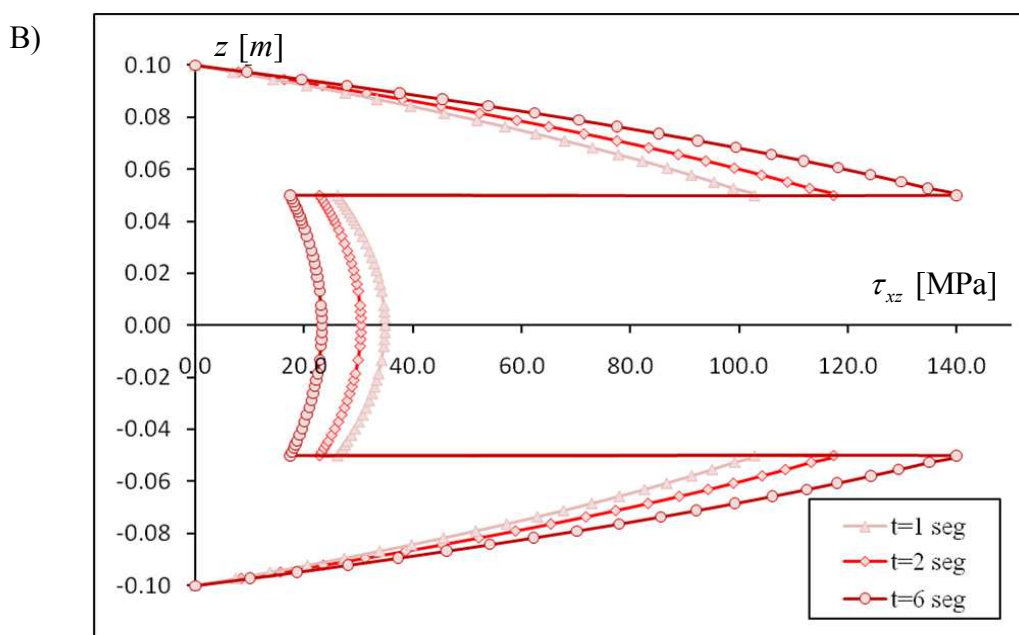


Figura 9. Diagramas de tensiones A)  $\sigma_{xx}(L/2; 2h/3)$ , B)  $\tau_{xz}(L/8; 0)$  para tiempos  $t$

En el último caso, se realiza un análisis dinámico para estudiar los desplazamientos verticales en función del tiempo (Fig.10), en una viga laminada empotrada en ambos extremos (E-E) y sometida a la aplicación instantánea de una carga uniformemente distribuida  $q = 1.0 \text{KN} / m$ , que luego se retira para que oscile libremente. En este caso se emplea la teoría polinómica de Reddy (ec.(5)). La viga tiene una longitud  $L = 0.2m$ , sección transversal  $h / b = 0.2 / 0.1m$  y está compuesta por tres láminas.

Consideramos variable la relación entre el espesor del núcleo de material visco-elástico  $h^{(2)}$ , y el espesor de las láminas externas de material elástico  $h^{(1)} = h^{(3)}$ . Las densidades de cada material son las siguientes:  $\rho^{(2)} = 1.600 \text{MN} / m^3$ ,  $\rho^{(1)} = \rho^{(3)} = 1.824 \text{MN} / m^3$ . En la Tabla 4 se resumen los resultados obtenidos para un tiempo inicial y un tiempo de amortiguamiento, empleando todas las teorías de deformación por corte descritas en la sección 2.1.

Tiempo [seg]	$h^{(2)}/h^{(1)}$	Teorías			
		HBT 1	HBT 2	HBT 3	HBT 4
1.40	0.5	0.70444	0.70658	0.70593	0.70439
1.40	1.0	0.77549	0.77831	0.77943	0.77306
1.40	2.0	0.78199	0.78199	0.78199	0.78199
1.40	4.0	0.83533	0.83606	0.83326	0.83466
6.80	0.5	0.62910	0.63001	0.62861	0.62870
0.70	1.0	0.68081	0.67883	0.67885	0.67983
0.74	2.0	0.62027	0.61943	0.61938	0.61928
0.82	4.0	0.54890	0.55274	0.54257	0.54254

Tabla 4. Variación de las deflexiones  $w(L/2)$  [cm] para distintos espesores de láminas del laminado tipo I

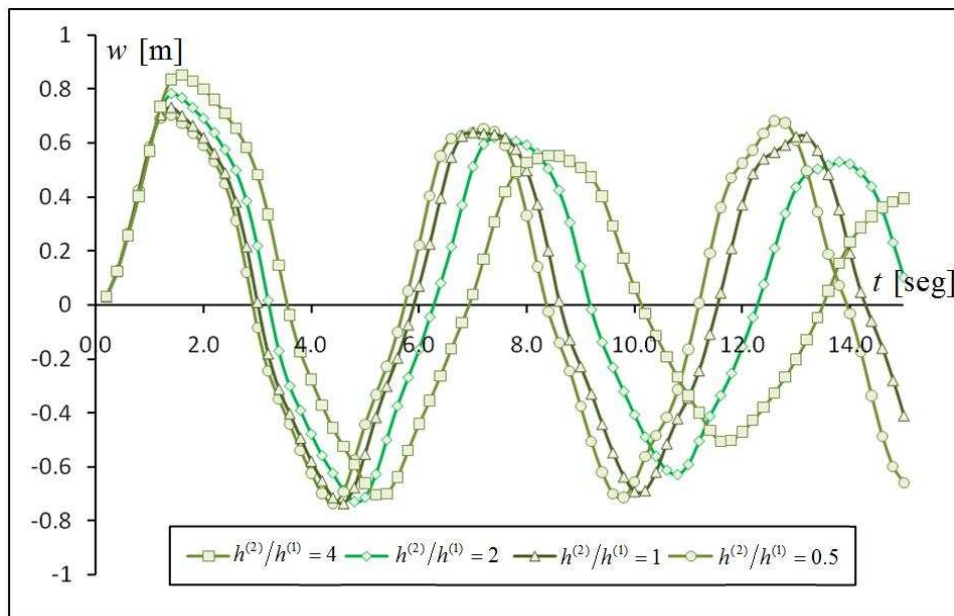


Figura 10. Diagrama de deflexión  $w(L/2)$  en función del tiempo  $t$

## 7 CONCLUSIONES

En este trabajo se emplea el modelo constitutivo visco-elástico de Maxwell generalizado para representar el comportamiento no-lineal dependiente del tiempo de vigas laminadas multicapas y vigas sándwich con núcleo débil. Se presenta la formulación, desarrollo e implementación computacional de un macro elemento finito jerárquico, aplicado al análisis estático y dinámico de este tipo de, vigas laminadas. El modelo incluye la deformación por corte a través de una cinemática que permite anular las tensiones tangenciales en la superficie libre y obtener una adecuada y precisa consideración de la distribución de dichas tensiones.

Para la resolución de la ecuación de equilibrio dinámico no lineal formulada a través de la primera ley de la termodinámica, se supone que los problemas temporales y espaciales son independientes entre sí, resolviendo en cada instante de tiempo  $t$  la ecuación que representa el equilibrio espacial en dicho instante de tiempo mediante la aplicación del método de Newmark y la linealización de Newton-Raphson.

Una de las principales ventajas, inherente al elemento finito jerárquico desarrollado, es la posibilidad de obtener con el uso de un único macro elemento una excelente aproximación en la respuesta. Además, esta formulación permite utilizar, en forma automática, la función de corte de cualquier teoría ESL. Para este trabajo se eligieron, a modo de ejemplo, cuatro teorías representativas (exponencial, trigonométrica, hiperbólica y polinómica) obteniéndose un algoritmo general unificado.

En los ejemplos numéricos cuasi-estáticos y dinámicos presentados se estudiaron las variaciones de las deflexiones verticales, las tensiones normales y las tensiones tangenciales en función del tiempo, como así también la distribución de tensiones en la altura de la sección transversal de la viga laminada. Se puede observar que el método propuesto produce excelentes resultados dado que en todos los casos se refleja el comportamiento del material visco-elástico y la correcta relación con cada uno de los parámetros que influyen en el modelo: condiciones de borde, tipos de carga, esbelteces, propiedades mecánicas y espesor de cada lámina.

Finalmente, cabe destacar que los tiempos de pre-proceso, análisis y post-proceso se ven reducidos en gran medida mediante la utilización del elemento finito jerárquico propuesto.

## 8 REFERENCIAS

- Arikoglu A., Ozkol I. Vibration analysis of composite sandwich beams with viscoelastic core by using differential transform method. *Composite Structures*, 92(12): 3031-3039, 2010.
- Arvin H., Sadighi M., Ohadi A.R. A numerical study of free and forced vibration of composite sandwich beam with viscoelastic core. *Composite Structures*, 92: 996-1008, 2011.
- Asik M., Tezcan S. A mathematical model for the behavior of laminated glass beams. *Composite Structures*, 83: 1742-1753, 2005.
- Bardell, N.S., Dunsdon, J.M., Langley, R.S. Free vibration analysis of thin coplanar rectangular plate assemblies – Part I: theory, and initial results for especially orthotropic plates. *Composite Structures*, 34:129–143, 1996.
- Bennison, S.J., Davies, P.S. High-performance laminated glass for structurally efficient glazing. In: *Innovative Light-weight Structures and Sustainable Facades*, 1–12, 2008.
- Galuppi L., Royer-Carfagni G. Laminated beams with viscoelastic interlayer. *International Journal of Solids and Structures*, 49: 2637–2645, 2012.
- Ivanov I.V. Analysis, modelling, and optimization of laminated glasses as plane beam. *International Journal of Solids and Structures*, 43: 6887-6907, 2006.
- Karama M, Afaq KS, Mistou S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *Int J Solids Struct*, 40(6):1525–46, 2003.
- Latifi M., Kharazi M., Ovesy H.R. Effect of integral viscoelastic core on the nonlinear dynamic behaviour of composite sandwich beams with rectangular cross sections. *Int J Mech Sci*, 123: 141–150, 2017.
- Li Y.X., Hu Z.J., Sun L.Z. Dynamical behavior of a double-beam system interconnected by a viscoelastic layer. *Int J Mech Sci*, 105: 291-303, 2016.
- Loja M.A.R., Barbosa J.I., Mota Soares C.M. Dynamic behaviour of soft core sandwich beam structures using kriging-based layerwise models. *Compos Struct*, 134: 883-894, 2015.
- Mahmoodi S.N., Khadem S.E., Kokabi M. Non-linear free vibrations of Kelvin–Voigt viscoelastic beams. *Int J Mech Sci*, 49: 722-732, 2007.
- Nallim L.G. y Oller S. An analytical–numerical approach to simulate the dynamic behaviour of arbitrarily laminated composite plates. *Composite Structures*, 85: 311-325, 2008.
- Nallim L.G., Oller S, Grossi R.O. Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*, 194: 1797-1822, 2005.
- Nallim L.G., Oller S., Oñate E., Flores F.G. A hierarchical finite element for composite laminated beams using a refined zigzag theory. *Composite Structures*, 163: 168–184, 2017.
- Oller S. *Nonlinear Dynamics of Structures*. CIMNE. Springer, 2014.
- Pradeep V., Ganesan N., Bhaskar K. Vibration and thermal buckling of composite sandwich beams with viscoelastic core. *Compos Struct*, 81: 60-99, 2007.
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. Formulation of enriched macro elements using trigonometric shear deformation theory for free vibration analysis of symmetric laminated composite plate assemblies. *Compos Struct*, 119: 38–49, 2015.
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. Static and dynamic analysis of thick laminated plates using enriched macroelements. *Compos Struct*, 101: 94–103, 2013.
- Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech*, Trans ASME, 51(4):745–52, 1984.

- Salehi M., Aghaei H. Dynamic relaxation large deflection analysis of non-axisymmetric circular viscoelastic plates. *Comput Struct*, 83: 1878-1890, 2005.
- Thai H. y Choi D. Retraction notice to Zeroth-order shear deformation theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *Int. J. Mech. Sci.* 78: 35–43, 2014.
- Touratier M. A refined theory of laminated shallow shells. *International Journal of Solids and Structures*, 29(11): 1401–1415, 1992.